8.　ニュートン法のプログラミング

田中雅博

最適化プログラミング、教科書 pp.85–90

多変数関数の極値を数値的に求める代表的な手法その 2。

1　1 変数の関数

$f(x)$ が 2 回微分可能であるとするとき、勾配法よりも効率的なアルゴリズムがある。それがニュートン法である。

$f(x)$ の $x = \bar{x}$ でのテイラー展開は

$$f(\bar{x} + \Delta x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})\Delta x + \frac{1}{2}f''(\bar{x})\Delta x^2 + \cdots$$

$$\simeq f(\bar{x}) + f'(\bar{x})\Delta x + \frac{1}{2}f''(\bar{x})\Delta x^2$$

これの極大・極小を与える Δx は

$$\frac{d(f(\bar{x}) + f'(\bar{x})\Delta x + \frac{1}{2}f''(\bar{x})\Delta x^2)}{d\Delta x} = f'(\bar{x}) + f''(\bar{x})\Delta x = 0$$

を満たすので、

$$\Delta x = -\frac{f'(\bar{x})}{f''(\bar{x})}$$

すなわち、$x = \bar{x} - \frac{f'(\bar{x})}{f''(\bar{x})}$ が $f(x)$ の極値に近い。ただ、2 次近似をしているため、一度に極値が求まるわけではない。そこで、これを新しい $\bar{x}$ として再定義して、再び最適な Δx を求めるという手続きを、収束するまで繰り返す。これがニュートン法である。

プログラムは簡単なので、課題にしておこう。

課題 8

1. 教科書 (3.7) 式

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$$

の最大化を、Newton 法で行う。

教科書 p.86 にある Newton 法のアルゴリズムのプログラムを作成し、任意の x を引数にして極値 x と関数値 $f(x)$ を返す関数を作成し、

```
>> [x,f]=newton(10)
```

のように実行して得られる結果を示せ。$delta = 1.0e-10$ としておこう。

[提出物] Word に、以下の内容を示せ。

- 学籍番号、氏名、課題 8（番号を明記）
- 作成したすべての関数プログラムの MATLAB プログラムリスト
  - newton.m（メイン関数。引数は x の初期値、返り値は極値 x と関数値 $f(x)$）

```
function [x,f] = newton( x0 )
x=x0;
delta=1.0e-10;
xb=x; %xb は x バーのこと
?????????????????????????;
while ??????????????????
    xb=x;
    x = ????????????????;
end
f=func3_1(x);
end
```

  - func3_1.m（(3.7) 式の関数。引数は x、返り値は関数値)
  - func3_1p.m（(3.7) 式の関数の 1 階微分。引数は x、返り値は微分係数)
  - func3_1p2.m（(3.7) 式の関数 2 階微分。引数は x、返り値は 2 階微分係数)
- 収束した結果を示し、結果について考察せよ。