4.　基本的な線形代数計算（対角化）

田中雅博

最適化プログラミング

1　固有値固有ベクトルの重要な性質

$$A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$$

を満たす $\lambda, \boldsymbol{u}$ をそれぞれ固有値、固有ベクトルという。A が $n \times n$ 対称行列のとき、A は n 個の実数の固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を持ち、対応する固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ は要素がすべて実数の、互いに直交する単位ベクトルとなるように選べる（教科書 p.23）。

1.1　具体例

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

とするとき、A の固有値と固有ベクトルは

```
>> A=[4 1 3;1 3 2;3 2 5]

A =

     4     1     3
     1     3     2
     3     2     5

>> [U,D]=eig(A)

U =

    0.5774    0.5774    0.5774
    0.4412   -0.8156    0.3744
   -0.6870   -0.0386    0.7256
```

```
D =

    1.1944         0         0
         0    2.3868         0
         0         0    8.4188
```

となる。

1.2　確かめてみよう

３つの固有値と固有ベクトルが $A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$ を満たすことを確かめよ。
【確認】

```
>> A*U(:,1)

ans =

    0.6896
    0.5270
   -0.8206

>> D(1,1)*U(:,1)

ans =

    0.6896
    0.5270
   -0.8206
```

確かに、同じになっている。あとの２組も同様に確認できる。

1.3　確かめてみよう

３組の固有ベクトルが互いに直交することを確かめよ。
【確認】
３組のベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ が互いに直交するということは、$U = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ としたとき（この U は行列である）

$$U^T U = I$$

となることである（教科書 p.30)。MATLAB で確かめると、いま、U が上の U になっているから

```
>> U'*U
```

```
ans =

    1.0000   -0.0000   -0.0000
   -0.0000    1.0000    0.0000
   -0.0000    0.0000    1.0000
```

と、容易に確認できる。

ここからわかることは、$U^T = U^{-1}$ であるということである。

1.4　対角化

$$A\boldsymbol{u}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{u}_1, A\boldsymbol{u}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{u}_2, A\boldsymbol{u}_3 = \lambda_3 \boldsymbol{u}_3$$

なので、

$$(A\boldsymbol{u}_1\ A\boldsymbol{u}_2\ A\boldsymbol{u}_3) = (\lambda_1\boldsymbol{u}_1\ \lambda_2\boldsymbol{u}_2\ \lambda_3\boldsymbol{u}_3)$$

書き直すと

$$A\left(\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3\right) = (\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

よって

$$AU = U\Lambda$$
$$A = U\Lambda U^T$$

となる。対角行列 A をこのように分解することを、スペクトル分解（あるいは、固有値分解）という（教科書 p.31）。

1.5　やってみよう

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 7 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

とするとき、固有値分解 $A = U\Lambda U^T$ における U と Λ を求めよ。

1.6　対角化により何が得られるか

2 次形式 $(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x})$ を、標準形（同じ変数の 2 乗だけが出てくる形）にすることにより、最大や最小などの性質を見通すことができる。（教科書例題 1.25 を参照）。

つまり、

$$\boldsymbol{x}' = U^T\boldsymbol{x}$$

と変数を置き直すことにより

$$(U\boldsymbol{x}', AU\boldsymbol{x}') = \left(\boldsymbol{x}', U^T AU\boldsymbol{x}'\right) = (\boldsymbol{x}', \Lambda\boldsymbol{x}')$$
$$= \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \cdots + \lambda_n x_n'^2$$

と、異なる変数の積の項のない形（標準形）に変換できる。

課題

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 7 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

とするとき、固有値分解 $A = U\Lambda U^T$ を実際に行い、U と Λ を求め、数値的に、$A = U\Lambda U^T$ が成り立つことを確認せよ。
提出物：Word に、以下の内容を示せ。

- 学籍番号、氏名、課題番号（課題４）
- MATLAB プログラムリストと、得られた結果。