3.　基本的な線形代数計算（固有値、固有ベクトル、行列式、ランクなど）

田中雅博

最適化プログラミング

1　行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

MATLAB では、

```
>> A=[1 3;2 1]
```

と入れる。

1.1　転置

　すでに述べたように、行列（ベクトル）の転置は、

```
>> A'
```

と入れる。

1.2　行列の加算、減算

```
>> B=[-1 2; 9 1]
```

と B を定義しておき

```
>> A+B
```

のように、単純にプラス (+) で行列の加算、

```
>> A-2*B
```

のように、減算できる。行列に 2*のように定数を掛けることができる。うっかり、

```
>> A-2B
```

としがちなので、注意しよう。

1.3 行列のサイズ

```
>> C=[1 2 3; 6 5 4]

C =

     1     2     3
     6     5     4

>> size(C)

ans =

     2     3
```

と、size 関数は、縦、横、…のサイズを返す。

```
>> length(C)

ans =

     3
```

は、それぞれの次元での次数の最大値を示す。通常は、ベクトルの次元を求めるときに length を使う。

```
>> a=[1 2 3 4 5]

a =

     1     2     3     4     5

>> length(a)

ans =

     5
```

1.4 行列の積

```
>> A*C
```

のようにする。要素ごとの積は

```
>> A.*B
```

1.5 内積

ベクトル a とベクトル b の内積は

1.6 単位行列

$$IA = AI = A$$

となるような、行列 I を単位行列という。MATLAB では、

```
>> eye(2)
```

と入れる（カッコ内は次元である）。試しに、

```
>> I=eye(2)
>> I*A
```

とすると

```
ans =

     1     3
     2     1
```

となる。

1.7 ゼロ配列

```
>> zeros(2,3)

ans =

     0     0     0
     0     0     0
```

と、行と列の数を引数とする。また、オール 1 の配列は

```
>> ones(3,2)

ans =

     1     1
     1     1
     1     1

>>
```

とする。

1.8　行列式

```
>> det(A)
```

で、行列式が求まる。行列式が 0 のとき、逆行列を持たない（正則ではない)。

```
>> P=[1 2; 2 4]

P =

     1     2
     2     4

>> det(P)

ans =

     0
```

1.9　ランク（階数）

行列を、ベクトルが並んでいると見たとき、一次独立なベクトルの個数がランクである。

```
>> P=[1 2; 2 4]
>> rank(P)

ans =

     1
```

正則であれば、フルランクである。

```
>> rank(A)

ans =

     2
```

1.10　ノルム

ベクトルのノルム（距離）で、よく使うのは、1-ノルム（要素の絶対値の和)、2-ノルム（=ユークリッドノルム)、∞-ノルム（最も大きな要素）である。

```
>> a

a =
```

```
     1     2     3     4     5

>> norm(a)

ans =

    7.4162

>> norm(a,1)

ans =

    15

>> norm(a,2)

ans =

    7.4162

>> norm(a,inf)

ans =

     5
```

1.11　トレース

対角成分の和。

```
>> A

A =

     1     3
     2     1

>> trace(A)

ans =

     2
```

1.12 逆行列

$$AR = I$$

となるような行列 R を A の逆行列という。

```
>> A

A =

     1     3
     2     1

>> inv(A)

ans =

   -0.2000    0.6000
    0.4000   -0.2000
```

行列が正則でないとき、逆行列を持たないが、それを無視して求めようとすると、以下のような表示となる。

```
>> P

P =

     1     2
     2     4

>> inv(P)
Warning: 行列が特異なため、正確に処理できません。

ans =

   Inf   Inf
   Inf   Inf
```

こうした結果をそのまま使うと、その後の計算が意味をなさない。まず、逆行列があるかどうかを知り、あることがわかったときのみ計算する必要がある。

```
>> rank(P)
```
あるいは
```
>> det(P)
```

で調べること。

1.13　線形システム方程式の解

$$2x + y = 1$$

$$-x + 2y = -1$$

の解を求める。まず、上の 2 つの式を

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とする。これを、$AX = B$ とみるとき、X は

```
>> linsolve(A,B)

ans =

    0.6000
   -0.2000
```

で求まる。もちろん、$X = A^{-1}B$ なので、

```
>> inv(A)*B

ans =

    0.6000
   -0.2000
```

でも求めることができる。

1.14　行列の部分行列の作り方

MATLAB では、行や列を削除して行列のサイズを変えることができる。その方法は、

```
>> C

C =

     1     2     3
     6     5     4

>> C(:,1)=[]

C =
```

```
     2     3
     5     4

>>
```

のように、削る行や列を示し（上記の例では、1 列目すべて)、それを「なし」にする（MATLAB では、[] とする）ことでできる。成形された行列の行や列はその形での行や列の番号になる（つまり、1 列目を削除したら、もとの 2 列目→ 1 列目、3 列目→ 2 列目）となるので、注意する。

2 固有値、固有ベクトル

$$A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$$

となるような λ を固有値、$\boldsymbol{u}$ を固有ベクトルという。λ と $\boldsymbol{u}$ は対応しており、一つの A に対してこのような組が通常、いくつかある。

2.1 固有値

```
>> A=[6 2; 2 3]

A =

     6     2
     2     3

>> eig(A)

ans =

    2.0000
    7.0000

>> [V,D]=eig(A)

V =

    0.4472   -0.8944
   -0.8944   -0.4472



D =

    2.0000         0
         0    7.0000
```

この見方を説明しよう。固有値は、D の対角成分である、2 と 7 である。2 に対しては、固有ベクトルが V の 1 列目

```
V =

    0.4472
   -0.8944
```

また、7 に対しては、固有ベクトルが V の 2 列目

```
V =

    -0.8944
    -0.4472
```

である。

【検証】

```
A*V(:,1)= D(1,1)*V(:,1)
```

および

```
A*V(:,2)= D(2,2)*V(:,2)
```

を確かめよう。

```
>> A*V(:,1)

ans =

    0.8944
   -1.7889

>> D(1,1)*V(:,1)

ans =

    0.8944
   -1.7889

>> A*V(:,2)

ans =

   -6.2610
   -3.1305

>> D(2,2)*V(:,2)
```

```
ans =

   -6.2610
   -3.1305
```

となり、確かに成り立っている。

3 課題

MATLAB を実行して、Word でレポートを作成し、自分のフォルダに保存せよ。レポート内容は、試験問題の解答に準じること。また、後日ファイル提出の指示があったときに、すぐに送信できるようにしておくこと。本日提出する必要はない (採点時にタイムスタンプを見ることもある。解説後に書いたものとは区別して採点する。書き上げたのちに修正すると、その時刻が残るので修正しないこと（もし自分のために修正するのであれば、別のファイルを作ること)。

(1) 次の行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

の固有値とそれらに対応する固有ベクトルを求めるプログラム（スクリプト）を作成せよ。３組の固有値と固有ベクトルを、各組ごとに示せ。

(2) これら 3 つの固有ベクトルは、直交していることを、MATLAB 上で確かめよ。

(3) これら 3 つの固有ベクトルは、正規化されている、つまり、ユークリッドノルムが 1 であることを MATLAB により確かめよ。

注意：

- login 情報を取得して出席管理を行う。直前の授業の関係で遅れる人は、到着 5 分遅れまで（記録される login を 10:50）まで認める。それ以上遅れるようなら、前の授業の教員に、10 時半には授業を終わってもらうように申し出ること。
- 解答内容は MATLAB のスクリプトと出力結果だけでなく、必要に応じて言葉で補い、テストの答案のように、「読める」ものにすること。