3.　基本的な線形代数計算（固有値、固有ベクトル、行列式、ランクなど）

田中雅博

最適化プログラミング

1　行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

MATLAB では、

```
>> A=[1 3;2 1]
```

と入れる。

1.1　転置

　すでに述べたように、行列（ベクトル）の転置は、

```
>> A'
```

と入れる。

1.2　行列の加算、減算

```
>> B=[-1 2; 9 1]
```

と B を定義しておき

```
>> A+B
```

のように、単純にプラス (+) で行列の加算、

```
>> A-2*B
```

のように、減算できる。行列に 2*のように定数を掛けることができる。うっかり、

```
>> A-2B
```

としがちなので、注意しよう。

1.3 行列のサイズ

```
>> C=[1 2 3; 6 5 4]

C =

     1     2     3
     6     5     4

>> size(C)

ans =

     2     3
```

と、size 関数は、縦、横、…のサイズを返す。

```
>> length(C)

ans =

     3
```

は、それぞれの次元での次数の最大値を示す。通常は、ベクトルの次元を求めるときに length を使う。

```
>> a=[1 2 3 4 5]

a =

     1     2     3     4     5

>> length(a)

ans =

     5
```

1.4 行列の積

```
>> A*C
```

のようにする。要素ごとの積は

```
>> A.*B
```

1.5　内積

ベクトル a とベクトル b の内積は

1.6　単位行列

$$IA = AI = A$$

となるような、行列 I を単位行列という。MATLAB では、

```
>> eye(2)
```

と入れる（カッコ内は次元である）。試しに、

```
>> I=eye(2)
>> I*A
```

とすると

```
ans =

     1     3
     2     1
```

となる。

1.7　ゼロ配列

```
>> zeros(2,3)

ans =

     0     0     0
     0     0     0
```

と、行と列の数を引数とする。また、オール 1 の配列は

```
>> ones(3,2)

ans =

     1     1
     1     1
     1     1

>>
```

とする。

1.8 行列式

```
>> det(A)
```

で、行列式が求まる。行列式が 0 のとき、逆行列を持たない（正則ではない)。

```
>> P=[1 2; 2 4]

P =

     1     2
     2     4

>> det(P)

ans =

     0
```

1.9 ランク（階数）

行列を、ベクトルが並んでいると見たとき、一次独立なベクトルの個数がランクである。

```
>> P=[1 2; 2 4]
>> rank(P)

ans =

     1
```

正則であれば、フルランクである。

```
>> rank(A)

ans =

     2
```

1.10 ノルム

ベクトルのノルム（距離）で、よく使うのは、1-ノルム（要素の絶対値の和)、2-ノルム（=ユークリッドノルム)、∞-ノルム（最も大きな要素）である。

```
>> a

a =
```

```
     1     2     3     4     5

>> norm(a)

ans =

    7.4162

>> norm(a,1)

ans =

    15

>> norm(a,2)

ans =

    7.4162

>> norm(a,inf)

ans =

     5
```

問 1

1 辺が 1 の長さのサイコロの、最も遠い頂点の間の直線距離をノルムを使って求めよ。

問 2

同じサイコロで、最も遠い頂点の間の辺を伝って動くときの最短距離をノルムを使って求めよ。

1.11 トレース

対角成分の和。

```
>> A

A =

     1     3
     2     1
```

```
>> trace(A)

ans =

     2
```

1.12 逆行列

$$AR = I$$

となるような行列 R を A の逆行列という。

```
>> A

A =

     1     3
     2     1

>> inv(A)

ans =

   -0.2000    0.6000
    0.4000   -0.2000
```

行列が正則でないとき、逆行列を持たないが、それを無視して求めようとすると、以下のような表示となる。

```
>> P

P =

     1     2
     2     4

>> inv(P)
Warning: 行列が特異なため、正確に処理できません。

ans =

   Inf   Inf
   Inf   Inf
```

こうした結果をそのまま使うと、その後の計算が意味をなさない。まず、逆行列があるかどうかを知り、あることがわかったときのみ計算する必要がある。

```
>> rank(P)
```
あるいは
```
>> det(P)
```

で調べること。

1.13　線形システム方程式の解

$$2x + y = 1$$

$$-x + 2y = -1$$

の解を求める。まず、上の 2 つの式を

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とする。これを、$AX = B$ とみるとき、X は

```
>> linsolve(A,B)

ans =

    0.6000
   -0.2000
```

で求まる。もちろん、$X = A^{-1}B$ なので、

```
>> inv(A)*B

ans =

    0.6000
   -0.2000
```

でも求めることができる。

1.14　行列の部分行列の作り方

MATLAB では、行や列を削除して行列のサイズを変えることができる。その方法は、

```
>> C

C =

     1     2     3
     6     5     4

>> C(:,1)=[]

C =

     2     3
     5     4

>>
```

のように、削る行や列を示し（上記の例では、1 列目すべて)、それを「なし」にする（MATLAB では、[] とする）ことでできる。成形された行列の行や列はその形での行や列の番号になる（つまり、1 列目を削除したら、もとの 2 列目→ 1 列目、3 列目→ 2 列目）となるので、注意する。

2　固有値、固有ベクトル

$$A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$$

となるような λ を固有値、$\boldsymbol{u}$ を固有ベクトルという。λ と $\boldsymbol{u}$ は対応しており、一つの A に対してこのような組が通常、いくつかある。

2.1　固有値

```
>> A=[6 2; 2 3]

A =

     6     2
     2     3

>> eig(A)

ans =

    2.0000
    7.0000
```

```
>> [V,D]=eig(A)

V =

    0.4472   -0.8944
   -0.8944   -0.4472


D =

    2.0000         0
         0    7.0000
```

この見方を説明しよう。固有値は、D の対角成分である、2 と 7 である。2 に対しては、固有ベクトルが V の 1 列目

```
V =

    0.4472
   -0.8944
```

また、7 に対しては、固有ベクトルが V の 2 列目

```
V =

    -0.8944
    -0.4472
```

である。

【検証】

```
A*V(:,1)= D(1,1)*V(:,1)
```
および
```
A*V(:,2)= D(2,2)*V(:,2)
```

を確かめよう。

```
>> A*V(:,1)

ans =

    0.8944
   -1.7889

>> D(1,1)*V(:,1)

ans =
```

```
    0.8944
   -1.7889

>> A*V(:,2)

ans =

   -6.2610
   -3.1305

>> D(2,2)*V(:,2)

ans =

   -6.2610
   -3.1305
```

となり、確かに成り立っている。